4.4.20 Kvadratická funkce II

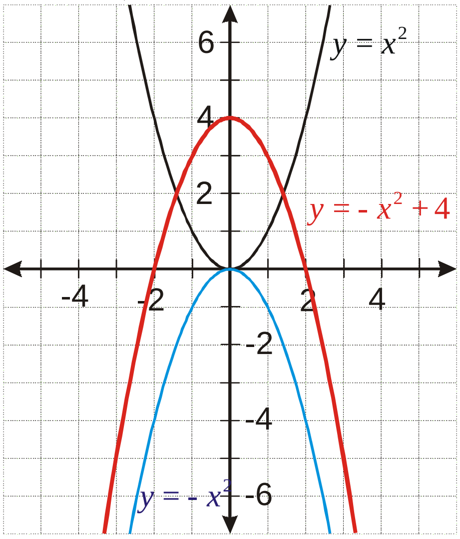
Předpoklady: 040419

Př. 1: Nakresli graf kvadratické funkce $y=-x^2+4$. Kdy je funkce rostoucí, kdy klesající?

Vycházíme postupně z funkce $y=x^2$.

$y=-x^2$: graf se převrátí podle osy *x* (z kladných hodnot *y* se staly záporné)

$y=-x^2+4$: převrácený graf se posunuje o 4 nahoru (všechny hodnoty funkce $y=-x^2$ se zvětší o 4)



Výsledek si můžeme ověřit i pomocí tabulky s hodnotami.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	0	3	4	3	0	-5

Př. 2: Ve kterých bodech protínají grafy následujících funkcí osu *x*? Zkontroluj výsledky bodů a) a b) nakreslením grafů.

a) $y=x^2-1$ b) $y=x^2+2$ c) $y=3x^2-9$

Kdy se graf funkce $y=x^2+a$ protíná s osou *x*?

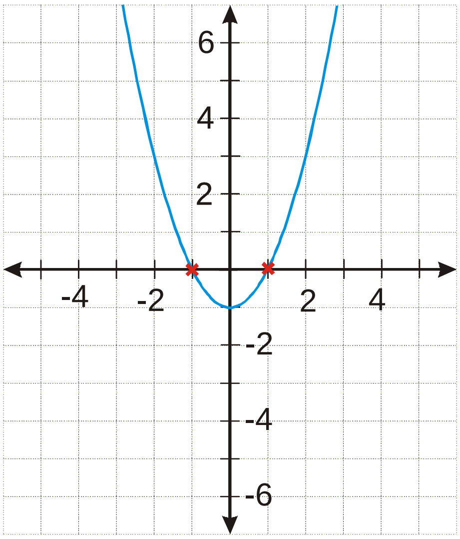
Průsečík s osou *x*: bod, pro který platí $y=0$.

a) $y=x^2-1 \Rightarrow$ dosadíme: $0=x^2-1 \Rightarrow$ řešíme kvadratickou rovnici.

$0=x^2-1=(x-1)(x+1) \Rightarrow$ dvě řešení:

- $x_1=1 \Rightarrow$ bod $[1;0]$,
- $x_1=-1 \Rightarrow$ bod $[-1;0]$.

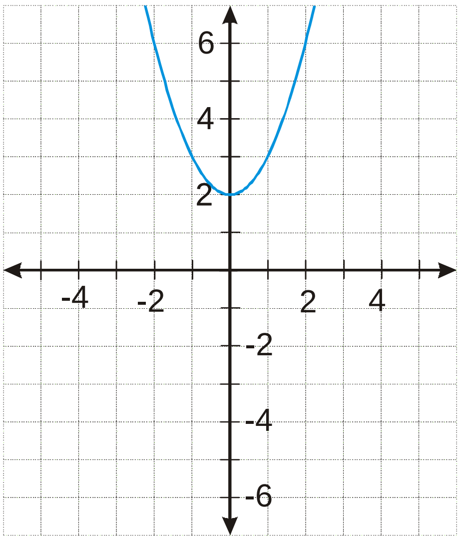
Funkce $y=x^2-1$ (posunutá vůči funkci $y=x^2$ o 1 dolů) se s osou *x* protíná v bodech $[1;0]$ a $[-1;0]$.



b) $y = x^2 + 2$

$\Rightarrow$ dosadíme: $0 = x^2 + 2$ $\Rightarrow$ řešíme kvadratickou rovnici.

Výraz $x^2 + 2$ nejde rozložit (rovnice $x^2 + 2 = 0$ nemůže nikdy vyjít protože x^2 je nezáporné číslo) $\Rightarrow$ funkce $y = x^2 + 2$ se osou x neprotíná.



c) $y = 3x^2 - 9$ $\Rightarrow$ dosadíme: $0 = 3x^2 - 9$ $\Rightarrow$ řešíme kvadratickou rovnici.

$0 = 3x^2 - 9 = 3\left(x^2 - 3\right) = 3\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$ $\Rightarrow$ dvě řešení:

- $x_1 = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ bod $\left[\sqrt{3}; 0\right]$,
- $x_1 = -\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ bod $\left[-\sqrt{3}; 0\right]$.

Funkce $y = 3x^2 - 9$ se s osou x protíná v bodech $\left[\sqrt{3}; 0\right]$ a $\left[-\sqrt{3}; 0\right]$.

Graf funkce $y = x^2 + a$ se protíná s osou x, právě, když $a \leq 0$. Dvě zdůvodnění:

- pro $a \leq 0$ je vrchol paraboly buď v bodě $[0; 0]$ nebo je posunutý pod osu x (směrem dolů) $\Rightarrow$ parabola se musí protínat s osou x,
- pro $a \leq 0$ má rovnice $x^2 - a = 0$ řešení.

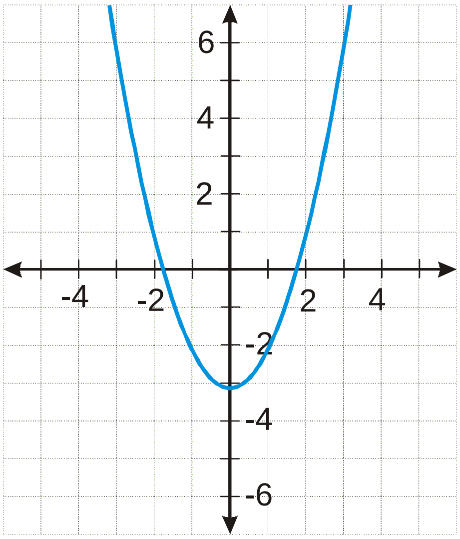
Př. 3: Nakresli graf funkce $y = x^2 - \pi$. Pro, které hodnoty x platí:

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) > 0$ c) $f(x) \leq 0$

Graf funkce $y = x^2 - \pi$ je vzhledem ke grafu funkce $y = x^2$ posunutý o $\pi \doteq 3{,}14$ dolů.
Řešení příkladu je závislé na souřadnicích průsečíků grafu s osou x $\Rightarrow$ dosadíme: $0 = x^2 - \pi$ $\Rightarrow$ řešíme kvadratickou rovnici.
$0 = x^2 - \pi = \left(x - \sqrt{\pi}\right)\left(x + \sqrt{\pi}\right)$ $\Rightarrow$ dvě řešení:

- $x_1 = \sqrt{\pi}$ $\Rightarrow$ bod $\left[\sqrt{\pi}; 0\right]$,
- $x_1 = -\sqrt{\pi}$ $\Rightarrow$ bod $\left[-\sqrt{\pi}; 0\right]$.

Funkce $y = x^2 - \pi$ se s osou x protíná v bodech $\left[\sqrt{\pi}; 0\right]$ a $\left[-\sqrt{\pi}; 0\right]$.



Teď snadno dořešíme příklad.

a) $f(x) = 0$ pro $x = -\sqrt{\pi}$ a $x = \sqrt{\pi}$.

b) $f(x) > 0$ pro $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\pi}\right) \cup \left(\sqrt{\pi}; \infty\right)$.

c) $f(x) \leq 0$ pro $x \in \left\langle -\sqrt{\pi}; \sqrt{\pi} \right\rangle$

Pedagogická poznámka: Následující příklad většina třídy neřeší, synchronizujeme tak,a by všichni začali s řešením příkladu 5.

Př. 4: Pro kterou kvadratickou funkci platí: $f(x) \geq 0$ pro $x \in \langle -4; 4 \rangle$?

Předchozí příklad: kvadratická funkce ve tvaru „ďolíku“ $\Rightarrow$ hodnoty jsou větší než nula pro velmi velká a velmi malá x („na krajích číselné osy“) $\Rightarrow$ funkce, kterou hledáme, musí mít opačný tvar „kopečku“ (aby byla nad osou x v prostřední části grafu) $\Rightarrow$ půjde o graf $y = -x^2 + a$ s průsečíky s osou x v bodech $[-4; 0]$ a $[0; 4]$.

Platí $-(-4)^2 = -16 \Rightarrow$ graf musí být posunutý o 16 nahoru $\Rightarrow$ hledanou funkcí je funkce $y = -x^2 + 16$.

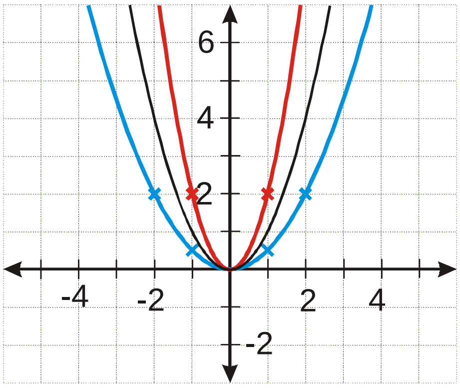
Př. 5: Nakresli do jednoho obrázku grafy následujících kvadratických funkcí.
a) $y = x^2$ b) $y = 2x^2$ c) $y = 0,5x^2$
Jak ovlivňuje hodnota parametru *a* graf funkce $y = ax^2$?

Spočteme si hodnoty všech funkcí pro několik hodnot *x*.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = 0,5x^2$	2	0,5	0	0,5	2

Kreslíme grafy:

- $y = x^2$: už známe,
- $y = 2x^2$: všechny hodnoty *y* jsou dvakrát větší než odpovídající hodnoty *y* u funkce $y = x^2 \Rightarrow$ graf se ve svislém směru protáhne dvakrát (dvakrát zvětší), vrchol v bodě $[0; 0]$ zůstane,
- $y = 0,5x^2$: všechny hodnoty *y* jsou poloviční než odpovídající hodnoty *y* u funkce $y = x^2 \Rightarrow$ graf se ve svislém směru zkrátí dvakrát (dvakrát zmenší) , vrchol v bodě $[0; 0]$ zůstane,



Hodnota parametru *a* u funkce $y = ax^2$ ovlivňuje protažení grafu ve svislém směru (větší hodnota *a* $\Rightarrow$ protaženější, užší graf). Pokud je hodnota záporná graf se převrátí podle osy *x*.

Př. 6: Najdi čísla *a*, *b* tak, aby kvadratická funkce $y = ax^2 + b$ procházela body $[1; -1]$ a $[-2; 5]$.

V předpisu máme dvě neznámé, známe dva body $\Rightarrow$ dosazením bodů do předpisu získáme dvě rovnice, jejich řešením pak hodnoty obou neznámých.

$[1; -1]$: $-1 = a \cdot 1^2 + b$,

$[-2; 5]$: $5 = a \cdot (-2)^2 + b$

Soustava rovnic:

$a+b=-1$

$4a+b=5$

Odečteme rovnice: $3a=6 \quad /:3$

$a=2$

Dopočteme hodnotu b: $2+b=-1 \quad /-2$

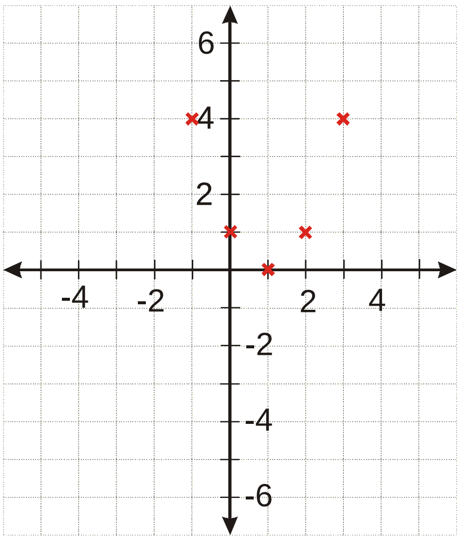
$b=-3$

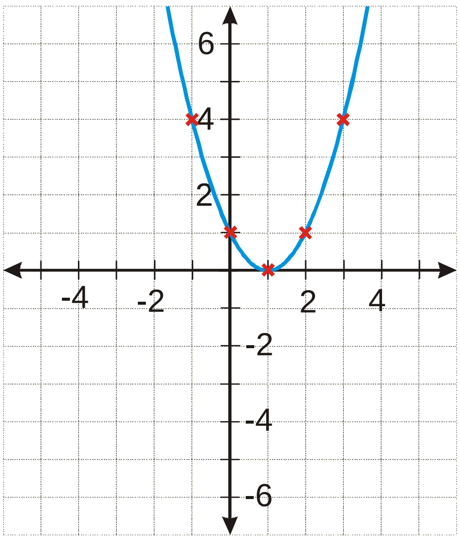
Body $[1;-1]$ a $[-2;5]$ prochází funkce $y=2x^2-3$

Př. 7: Nakresli graf funkce $y=(x-1)^2$. Jak můžeme z předpisu rozhodnout, kterým směrem se posune vrchol kvadratické funkce?

Spočteme si v tabulce hodnoty.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	16	9	4	1	0	1	4





Graf se posunul o jedna doprava. Zdůvodnění:

- Za x musíme dosadit 1, aby v závorce, kterou dáváme na druhou, byla 0 $\Rightarrow$ vrchol paraboly leží v bodě $[1; 0]$.
- Předpis $y=(x-1)^2$: před umocněním na druhou dosazované hodnoty x zmenšíme o 1 $\Rightarrow$ do funkce $y=(x-1)^2$ musíme dosadit o 1 větší hodnotu x, abychom získali stejnou hodnotu y jako u funkce $y=x^2$ $\Rightarrow$ graf se posune o 1 doprava.

Shrnutí: